МКОУ «Большеатлымская средняя общеобразовательная школа»

Исследовательская работа на тему:

«Интеграл и его практическое применение»

Работу выполнил: Ершов Николай,

ученик 11 класса

Руководитель: Дедовец Надежда Артемовна,

учитель математики

С. Большой Атлым

2012-2013 уч. год

Содержание

1. Введение.
2. История интеграла.
3. Задача интегрирования.
4. Геометрический смысл интеграла.
5. Интегральные суммы.
6. Обозначение интеграла.
7. Вычисление интеграла.
8. Приложения интеграла.
   1. Площадь;
   2. Работа;
   3. Перемещение;
   4. Масса;
   5. Электрический заряд;
   6. Вычисление объемов геометрических тел;
   7. Решение прикладных задач;
   8. Дифференциальные уравнения.

9. Заключение.

**Объект исследования:** область математики – интегрирование.

**Цель работы:** Расширить область математических знаний. Развивать логическое

мышление.

Вывести общие формулы, позволяющие решать задачи

интегрирования. Показать, что интеграл широко применяется в

различных сферах жизнедеятельности.

**Гипотеза:** изучение основ интегрального исчисления, которое способствует осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в различных областях.

**Задачи исследования:**

- собрать, изучить и систематизировать материал об интеграле;

- рассмотреть, как интеграл используется при решении различных жизненных ситуаций;

- использование интеграла в различных сферах жизнедеятельности.

*Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее.*

*П. Л. Чебышев*

**1. Введение**

Интегральное исчисление дает богатый математический аппарат для моделирования и исследования процессов, происходящих в различных областях человеческой деятельности. Бурное развитие математики и физики не могло не наложить определенного отпечатка на уровень развития и направление интересов учащихся. Интерес молодежи к технике, физике и математике растет с каждым днем. Математика использует физические задачи для иллюстрации некоторых процессов, явлений и их исследования. Физики же не могут обойтись без аппарата математики. Интеграл – не исключение. Определенный класс задач решается с его использованием. Поэтому довольно актуальным становится углубленное изучение математики (в частности изучение темы «Интеграл») через прикладные задачи физики.

Интегральное исчисление в экономике используют для прогнозирования материальных затрат, нахождения потребительского излишка (разница между той денежной суммой, за которую производитель был бы готов продать 100 единиц товара, и той суммой, которую он реально получает при продаже этого количества товара), определения объема выпуска продукции, определения экономической эффективности капитальных вложений (задача дисконтирования). И это далеко не полный список приложений интегрального исчисления в жизни человека.

Таким образом, актуальность темы работы обусловлена:

·   необходимостью полноценного изучения важнейших элементов интегрального исчислении в связи с огромной значимостью и важностью этого материала для будущего образования;

·   недостаточной полнотой этого материала в курсе 11 класса.

**2. История интеграла**

Интегрирование прослеживается еще в древнем Египте, *примерно* в 1800 до н. э.,. Первым известным методом для рассчета интегралов является метод исчерпания Евдокса (*примерно* 370 до н. э.), который пытался найти площади и объемы, разрывая их на бесконечное множество частей, для которых площадь или объем уже известен. Этот метод был подхвачен и развит Архимедом, и использовался для расчета площадей парабол и приближенного расчета площади круга. Аналогичные методы были разработаны независимо в Китае во 3-м веке н.э Лю Хуэйем, который использовал их для нахождения площади круга. Этот метод был впоследствии использован Дзю Чонгши для нахождения объема сферы. Большой вклад в создание интегрального исчисления внес великий французский математик и философ Блез Паскаль. Паскаль доказал ряд теорем, касающихся интегрирования по частям и замены переменной. Связь между интегрированием и дифференцированием как взаимно обратными операциями в геометрической форме впервые показал Исаак Барроу в своем главном труде “Оптические и геометрические лекции”.

Барроу получил формулы, которые используются и сейчас для вычисления длин дуг кривых, заданных в декартовых и полярных координатах.

Общий метод дифференцирования и интегрирования с глубоким пониманием того, что один процесс является обратным по отношению к другому, был создан Ньютоном и Лейбницем независимо друг от друга.

Исаак Ньютон изложил свое исчисление в работе “Метод флюксий” в 1670–1671 гг. на несколько лет раньше Лейбница, однако опубликовано оно было лишь после смерти Ньютона в 1736 году. В “Методе флюксий” Ньютон четко сформулировал в математических и механических терминах обе взаимно обратные задачи анализа, разработал и применил метод флюксий к большому количеству геометрических задач (задачи о касательных, кривизне, экстремумах, квадратурах, спрямлении и т.д.). В этой же работе представлены в элементарных функциях ряд интегралов, решены некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые задачи вариационного исчисления.

Колоссальный труд Ньютона “Математические начала натуральной философии” (1687 г.), создававшийся на протяжении более 20 лет, показал все могущество дифференциального и интегрального исчисления в изучении природы и умение Ньютона их применять.

Готфрид Вильгельм Лейбниц используя геометрический подход и развивая идеи Паскаля и Барроу, создает собственное дифференциальное и интегральное исчисления (эти названия принадлежат Лейбницу). В 1684 году он публикует в основанном им самим математическом журнале Acta Eruditorum статью ”Новый метод для максимумов и минимумов, а также для касательных, для которого не являются препятствием дробные и иррациональные количества, и особый вид исчисления для этого”, а в 1686 году — статью “О скрытой геометрии...” с правилами интегрирования и знакомым нам символом интеграла.

Дальнейшее развитие дифференциального и интегрального исчисления связано с именами многих выдающихся ученых: братьев Бернулли — Якоба и Иоганна и, в первую очередь, Леонарда Эйлера. Трактаты Эйлера Дифференциальное исчисление” (1755 г.) и трехтомное “Интегральное исчисление” (1768–1770 гг.,) содержат последовательное изложение дифференциального и интегрального исчисления в известной нам форме, теорию дифференциальных уравнений, теорему Тейлора со многими приложениями, формулу суммирования Эйлера и эйлеровы интегралы (*B*– и *Γ*–функции).

Выдающийся вклад в развитие методов интегрального исчисления внесли работы Адриена Мари Лежандра “Упражнения по интегральному исчислению” в трех томах (1811–1819) и “Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах” (1827–1832), исследования Нильса Хенрика Абеля ( 1802–1829), Карла Густава Якоба Якоби (1804–1851), Михаила Васильевича Остроградского (1801–1862), Пафнутия Львовича Чебышева (1821–1894), Георга Фридриха Бернгарда Римана (1826–1866), Анри Луи Лебега (1875–1941),

Оскара Перрона ( 1880), Арно Данжуа (1884–1974), Александра Яковлевича Хинчина (1894–1959) и других ученых.

1. **Задача интегрирования**

Математика изучает различные связи между величинами. Важ­нейшие примеры таких связей дает механическое движение. Рассмотрим пример движения материальной точ­ки по оси. Между положением (координатой) точки и ее скоростью есть известная связь, лежащая в основе математического анализа: скорость является производной от координаты по времени. Сама операция нахождения производной называется дифференцирова­нием. Обратная задача — нахождение положения точки по ее ско­рости — решается с помощью другой математической операции, называемой *интегрированием*.

Известны примеры пары величин, которые связаны между собой так же, как положение точки и ее скорость. Нахождение одной из этих величин, если известна другая, сводится к операции дифференцирования. Так, линейная плотность тонкого стержня есть производная его массы по длине, мощность есть производная работы по времени, сила тока есть производная заряда по времени и т. д. С помощью обратной операции интегрирования вычисляем массу по заданной плотности, работу по из­вестной мощности, заряд по заданной силе тока и т. д.

Прежде всего рассмотрим геометрический смысл операции интегрирования. Начнем с задачи о механичес­ком движении. Пусть точка движется с постоянной скоростью *v=v0*. Графиком скорости в системе координат (t; *v*) будет прямая. *v=v0*, параллельная оси времени t. Если считать, что в начальный момент времени t=0 точка находилась в начале координат, то путь ее s, пройденный за время t, вычисляется по формуле *s= v0t*.Величина *v0t* представляет собой площадь прямоугольника, ограниченного графиком скорости, осью абсцисс и двумя верти­кальными прямыми, т. е. путь точки можно вычислить как площадь под графиком скорости (рис. 1).

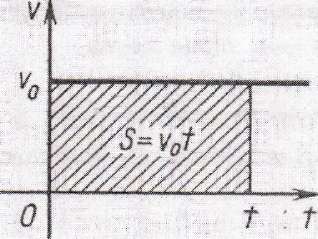


Рис. 1

Обратимся к случаю неравномерного движения. Теперь ско­рость можно считать постоянной только на маленьком отрезке времени. Если скорость изменяется по закону

v = v(t), то путь, пройденный за отрезок времени [t; t+dt] приближенно выразит­ся произведением v(t)dt, а на графике — площадью прямо­угольника со сторонами dt и v(t). Точное значение пути за отрезок времени [t; t+dt] равно площади криволинейной трапеции заштрихованной на рисунке 2.

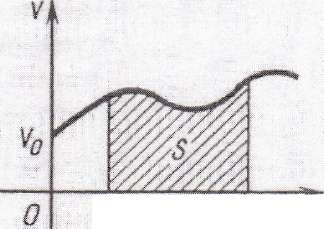


Рис. 2

Весь путь получится сложением площадей таких криволинейных трапеций, т. е. выразится как площадь подграфиком скорости.

Аналогично если начертим график зависимости силы тока от времени I=I(t) (рис. 3), то величина заряда q, перенесенного током за отрезок времени [t; t+dt], приближенно вычислится по формуле I(t)dt, т. е. представится площадью прямоугольника со сторонами dt и I(t). Точную величину заряда можно вычислить как площадь под графиком силы тока.

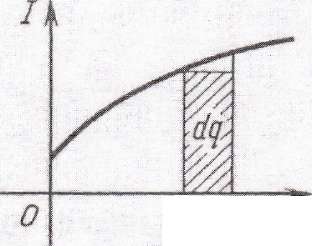


Рис. 3

1. **Геометрический смысл интеграла**

Коротко об интеграле можно сказать так:

***Интеграл* — *это площадь.***

Способ вычисления площади, о котором пойдет сейчас речь , уходит корнями в глубокую древность. Еще в III в. до н.э. великий Архимед вычислил площадь параболического сегмента с помощью изобретенного им «метода исчерпывания», который через две тысячи лет был преобразован в метод интегрирования. Прос­тейшими фигурами, площади которых нужно вычислять, являются криволинейные трапеции.

Определение. Пусть на координатной плоскости дан график положительной функции f, заданной на отрезке [a; b]. Криволинейной трапецией называется фигура ограниченная графиком функции f, прямыми x=a и x=b и осью абсцисс.

Можно образовать криволинейные трапеции с помощью различных известных вам функций. Некоторые примеры их представлены на рисунке 4.

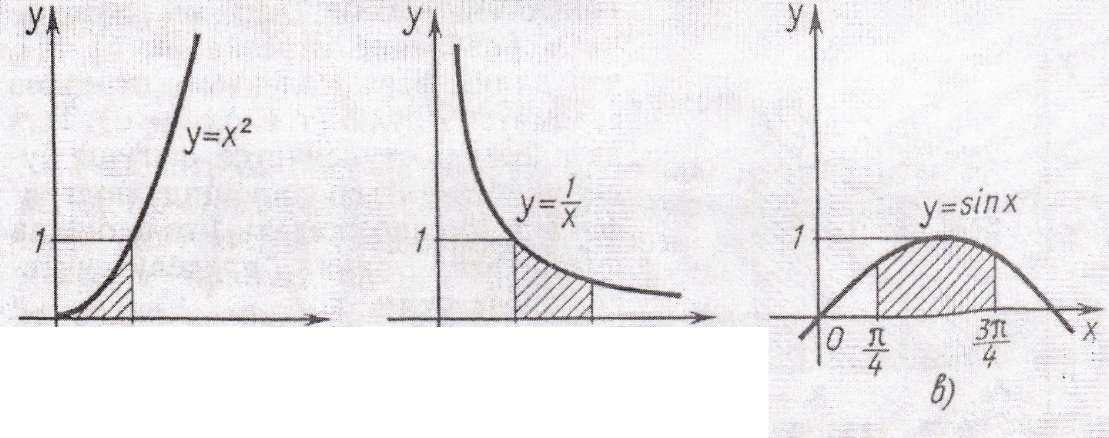


Рис. 4

Прямое вычисление площадей некоторых фигур, а значит, и интегралов от некоторых функций проделал еще Архимед. Однако лишь в XVII в. Ньютону и Лейбницу удалось открыть общий способ вычисления интегралов.

1. **Интегральные суммы**

«Метод исчерпывания» Архимеда хотя и не дал общего способа вычисления площади, однако сыграл очень большую роль в математике, так как с его помощью удалось объединить самые разные задачи — вычисление площади, объема, массы, работы, давления, электрического заряда, светового потока и многие, многие другие. Проиллюстрируем этот метод на простом примере. Предпо­ложим, что нам надо вычислить объем лимона, имеющего непра­вильную форму, и поэтому применить какую-либо известную фор­мулу объема нельзя. С помощью взвешивания найти объем также трудно, так как плотность лимона в разных частях его разная. Поступим следующим образом. Разрежем лимон на тонкие дольки. Каждую дольку приближенно можно считать цилиндриком, радиус основания которого можно измерить. Объем такого ци­линдра вычислить легко по готовой формуле. Сложив объемы маленьких цилиндров, мы получим приближенное значение объема всего лимона. Приближение будет тем точнее, чем на более тонкие части мы сможем разрезать лимон.

Применим аналогичную процедуру для вычисления площади подграфика. Рассмотрим подграфик функции f, заданной на от­резке [а;b] Разобьем этот отрезок на несколько частей. Площадь всего подграфика разобьется на сумму площадей более, мелких криволинейных трапеций.

Каждую такую трапецию можно: прибли­женно считать прямоугольником. Сумма площадей этих прямо­угольников дает приближенное представление о всей площади фигуры. Чем мельче мы разобьем отрезок [а;b], тем точнее вычислим площадь.

Запишем проведенное рассуждение в виде формул.

Разделим отрезок [*a;b*] на *п* частей точками х0 = *a,x1,…, xn=b.*

Длину *k-*гo обозначим через ∆xk = xk – xk-1. Составим сумму Sn=f(x1)∆x1 +…+f(xn)∆xn.  Геометрически эта сумма представляет собой площадь ступенчатой фигуры, выделенной на ри­сунке 5.

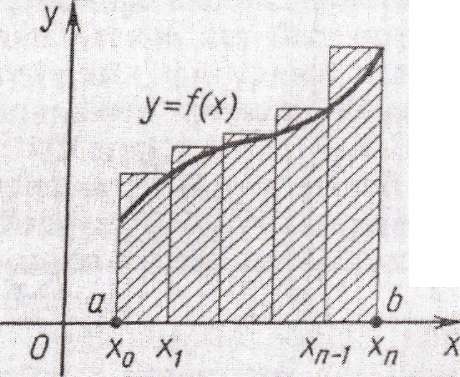


Рис. 5

Суммы вида Sn=f(x1)∆x1 +…+f(xn)∆xn называются интег­*ральными суммами для функции f.*

Интегральные суммы дают приближенное значение площади. Точное значение получается при помощи предельного перехода.

Представим себе, что мы измель­чаем разбиение отрезка [*а; b*] так, что длины всех маленьких отрезков стремятся к нулю (т. е. ∆xk→0). Тог­да площадь ступенчатой фигуры будет приближаться к площади кривой трапеции S. Можно сказать, что площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральных сумм, т.е. S→Sn.

Интеграл равен пределу интегральных сумм. С помощью интегральных сумм можно приближенно вычислять I самые различные величины.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Объем лимона. Обозначим толщину к-й дольки через ∆hk (необязательно резать лимон на дольки одинаковой толщины), а радиус ее через гk (к = 1,…, п — это означает, что мы разрезали лимон на п долек).

Объем лимона приближенно представим интегральной суммой

Sn = π r12∆h1 + …+ π r12∆hn

***Работа.*** Предположим, что на точку, движущуюся по оси действует некоторая сила F, направленная по той же оси. Мы знаем, что если сила F постоянна, то работа равна Fs, где s — путь, пройденный точкой. Предположим теперь, что F меняется от точки к точке и нам известно ее значение F (х) в каждой точке х некоторого промежутка [а; b]. Как найти работу А по перемеще­нию точки из а в b?

Разобьем отрезок [а; b]на п отрезков. Будем приближенно считать, что на каждом

отрезке сила постоянна. В качестве посто­янной силы на отрезке [xk-1;xk] можно

взять значение функции F в одной из точек этого отрезка, например в точке xk. Работу на k-м отрезке пути приближенно можно представить как произведение

F(xk) ∆xk, а на всем отрезке — интегральной суммой:

Аn = F (x1) ∆ x1 +...+ F(xn) ∆xn

Точное значение работы А получается предельным переходом:

А =

Способ вычисления пределов интегральных сумм оказался очень трудным. Даже для простейших функций этот способ вы­числения интегралов неприменим. Архимед сумел вычислить не­которые площади, объемы, фактически находя пределы интеграль­ных сумм для квадратичной функции. Однако этот результат стоял особняком в математике до конца XVII в. когда было выяснено, что задача нахождения площади обратно к задаче на­хождения скорости.

Обобщим: для функции f мы построили новую функ­цию S — переменную площадь. Связь между функ­циями f и S такова:

S — интеграл от функции f,

f- производная функции S.

Из этого видно, что нахождение интеграла (интегрирование) и нахождение производной (дифференцирование) являются взаимно обратными операциями. Если мы знаем функцию f, то нахождение функции S (площади криволинейной трапеции от функции f) есть задача интегрирования функции f. Если же задана функция S, то на­хождение функции f (скорости роста площади) есть задача дифференцирования функции S.

6. **Обозначение интеграла**

Традиционно интеграл от функции у=f(x) на отрезке [а; Ь] обозначается так:

Эта традиция имеет исторические корни. Интегральные суммы с помощью которых

приближенно вычисляется интеграл, составляются из слагаемых вида f(x)∆х.

Приближенное равенство ∆S≈f (х) ∆х может быть заменено точным равенством

дифференциалов dS **= f (х) dx**. Интеграл можно представить как сумму «бесконечного

числа дифференциалов». Знак интеграла и есть стилизованная .запись буквы S —

первой буквы слова «сумма» на латинском языке:

S=

Как уже установили, что площадь S можно получать суммированием слагаемых

вида f(x)dx. Около знака интеграла ставятся пределы интегрирования — концы

отрезка [a;b] на котором задана функция f.

Переменная площадь S(х) запишется как площадь криволинейной трапеции функции

f на отрезке [а;x] т. е. в виде интеграла с переменным верхним пределом:

S(x) =.

Связь между функциями f и S, можно записать так:  S′(x)=()′= f(x)

1. **Вычисление интеграла.**

Ранее было определено, что интегрирование – это операция, обратная дифференцированию. Вычисление интеграла сводится к нахождению функции производная которой равна заданной функции. Рассмотрим эту операцию.

Определение. Первообразной для функции f называется такая функция F,

производная которой равна данной функции.

Иными словами, равенство  F′ = f

можно прочесть двумя способами: f — производная функции F или F — первообразная

для функции f. Для обозначения перво­образной традиционно используют знак и

неопределенного интегра­ла» т. е, интеграла без указания пределов интегрирования:

F(x)=∫f(x)dx.

Очень важно то, что операция дифференцирования совершается фор­мально — нужно

запомнить несколько правил, и их будет доста­точно для нахождения производных. Не

так обстоит дело с ин­тегрированием, например, нет формулы для интегрирования

произведения и частного функций. Поэтому составлены обширные таблицы интегралов

(первообразных) и появляется новая зада­ча — научиться преобразовывать вычисляемые

интегралы, сводя их к табличным.

Вычислять интегралы помогает знаменитая теорема Ньютона — **Лейбница.**

Эта теорема, носящая имена основоположников мате­матического анализа, гласит:

Интеграл равен приращению первообразной.

Запишем формулировку более подробно.

Теорема (**Ньютона** — Лейбница).

Пусть f — данная функ­ция, F — ее произвольная первообразная. Тогда

=F(b) —F(a).

**8. Приложения интеграла.**

Рассмотрим величины, которые вычисляются с помощью интеграла.

К таким величинам можно отнести перемещение, работу, массу, электрический

заряд,

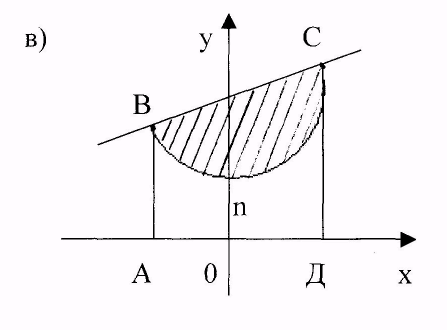
давление, теплоту, а также геометрические величины длина, площадь, объем.

Рассмотрим решение нескольких прикладных задач, решение которых сводиться к

вычислению интеграла

***Площадь.***

Пусть надо вычислить площадь какой-либо плоской фигуры Ф. Введем на плоскости декартову систему координат. Тогда отдельные куски границы фигуры Ф можно задать в виде графиков некоторых функций. Например – вариант на рис. 6. Площадь искомой фигуры Ф можно получить сложением или вычитанием площадей криволинейных трапеций, ограниченных функцией, как на рис. 6



**Sф = SАВСD – SABnCD**

рис. 6

Вычисление площади – самое простое применение интеграла, так как интеграл по

определению тесно связан с площадью.

1. ***Работа.***

Пусть тело движется по оси х, в каждой точке которой приложена некоторая сила

F = F(x). Вычислим работу, которую надо проделать при перемещении из точки а в

точку b. На маленьком отрезке пути от точки х до точки х + dх можно считать силу

постоянной и раной F(х). Тогда дифференциал работы запишем так: dA = F(x)dx.

Отсюда получаем, что всю работу на отрезке [a; b] можно записать в виде интеграла:

A =

Эта формула позволяет вычислить работу при прямолинейном движении.

Пример: пусть в точку О перемещен единичный электрический заряд. Он создает электрическое поле. На другой электрический заряд, помещенный в точку х, действует сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния – F(x) = . Найти работу электрический поля по перемещению единичного заряда из точки х1 в точку х2.

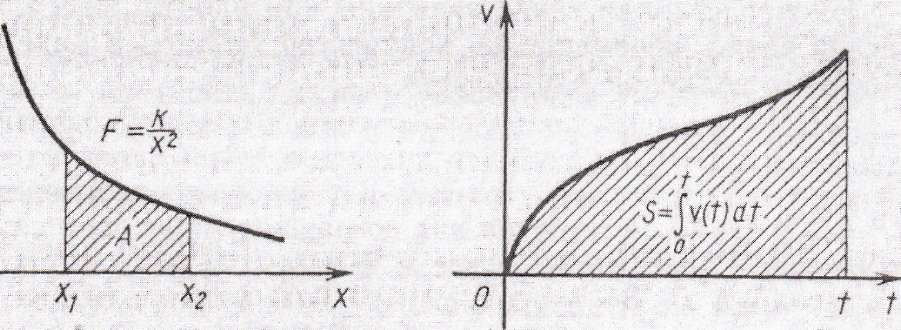
Применяя формулу для работы, получаем:

А = = k

Для функции F(x) = первообразную U(x) можно найти по таблице U(x) = - .

Тогда имеем: A = U(x) = - k/x = – .

Функция U(x) = - называется потенциалом электрического поля. Работа равна приращению функции U, т. e. разности потенциалов на концах отрезка.



Можно использовать и геометрический смысл интеграла как площади. Представим работу как площадь криволинейной трапеции для функции U. Эта площадь изображена на

рис. 7(левый).

Рис. 7

1. ***Перемещение***

Предположим, что точка движется по прямой (по оси х) и нам известна скорость этой

точки. Положение точки на оси бу­дем считать функцией времени: х = х(t).

Как найти перемещение точки за промежуток времени [t1;t2]?

Если скорость точки постоянна и равна v то это перемещение, которое мы обозначим

через s, вычисляется так: s =v (t1 — t2). Пусть теперь эта скорость меняется и нам

задан закон этого изменения:v=v(t). Рассмотрим отрезок времени [t;t+dt]. Главную

часть перемещения ∆s мы получим, если будем считать, что на этом отрезке скорость

постоянна и равна v(t) ,Получим:

ds = v(t)dt, откуда s=*.*

Если мы изобразим график скорости, то ***перемещение будет задаваться площадью***

***криволинейной трапеции***. Рис. 7 (правый)

1. ***Масса.***

Масса произвольного тела является величиной, для вычисле­ния-которой нужен более сложный интеграл, чем тот, который мы научились вычислять. Мы сможем написать формулу для вы­числения массы тонкого стержня, т. е. такого тела, в котором плотность меняется вдоль одного направления и которое можно представить как отрезок тонкой проволоки с изменяющейся плотностью.

Если стержень однороден, то его масса m пропорциональна длине l, т. е.

m = dl, где — коэффициент пропорциональности, называемый линейной плотностью. Поставим задачу вычисления массы неоднородного стержня, если известно, как меняется плотность – . Представим себе ,что стержень расположен вдоль оси так, что он занял положение отрезка (0;l). Тогда линейную плотность можно считать функцией от x, т.е = (x), заданной на этом отрезке. Возьмем отрезок [x; x + dx]. Считая на нем плотность постоянной, получим: dm =

Откуда m = . Таким образом, ***масса стержня является интегралом от его линейной плотности.***

1. ***Электрический заряд.***

Представим себе переменный ток, текущий по проводнику. Как вычислить заряд q,

переносимый за интервал времени [а*;* b] через сечение проводника? Если бы сила тока

не менялась со вре­менем, то изменение заряда q равнялось бы произведению I(b-а).

Пусть задан закон изменения I = I(t) в зависимости от времени. Тогда на малом

интервале времени [t;t+dt] можно счи­тать силу тока постоянной и равной I(t),

a dq=I (t)dt*.*

Тогда получим**: q =**

***6)Вычисление объёмов геометрических тел***

1. Заключаем тело Т между двумя параллельными плоскостями.

2. Вводим систему координат так, что ось ОХ перпендикулярна плоскостям.

3. Проводим плоскость Ф(х) параллельно плоскостям через точку с абсциссой х.

4. Определяем вид сечения и выражаем площадь через функцию S(х).

5. Проверяем, является ли функция S(х) непрерывной на [a;b].

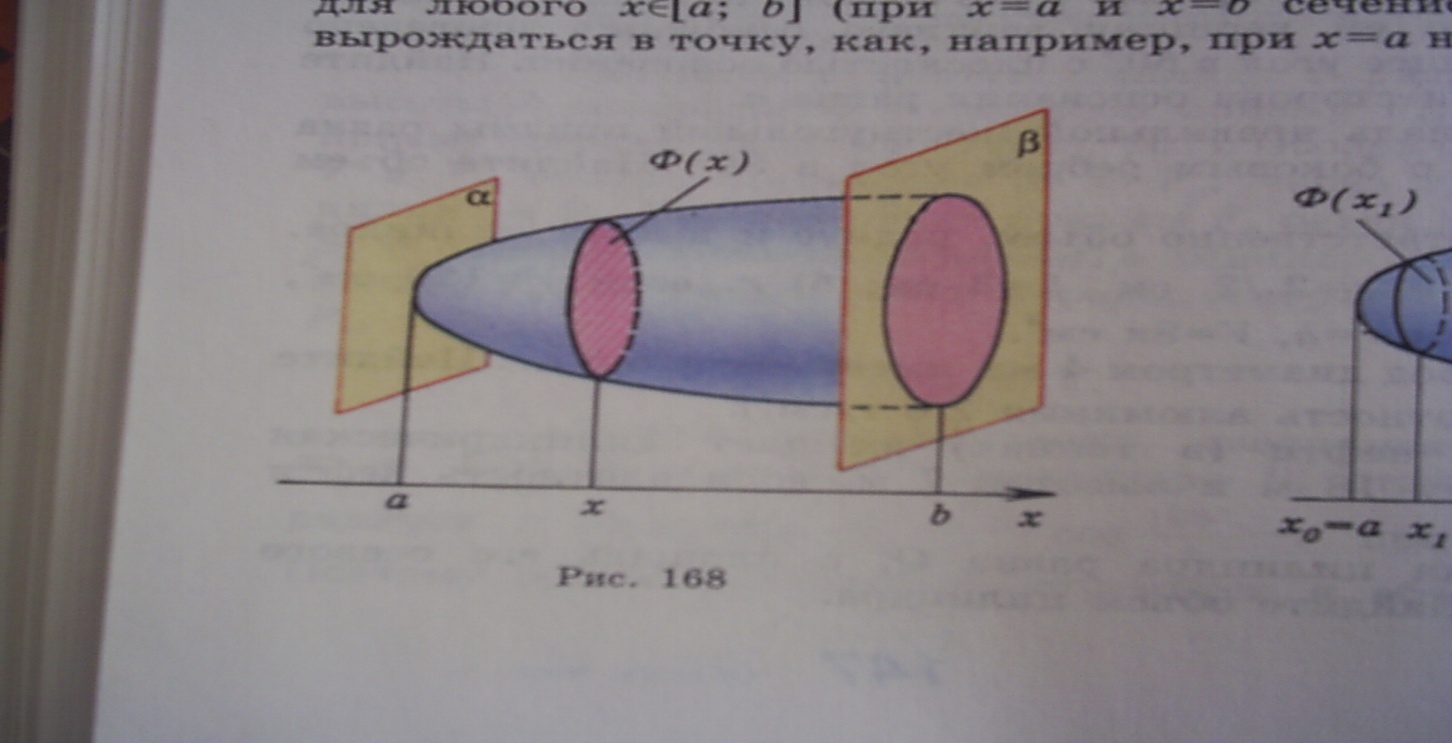


Рис. 8

6. Разбиваем [a;b] на n - равных отрезков точками а = х0, х1, х2, …хn=b

и проводим через хi плоскости перпендикулярно ОХ.

7. Плоскости разбивают тело Т на n- тел Т1, Т2, Т3,... Тn с основаниями Ф(хi)

и высотой Δxi= (b - a)/n

8. V≈Vn= (S(x1) + S(x2) +…+ S(xn) )Δxi= =(S(x1) + S(x2) +…+ S(xn))(b - a)/n.



При n →∞, Vn→V, поэтому

но



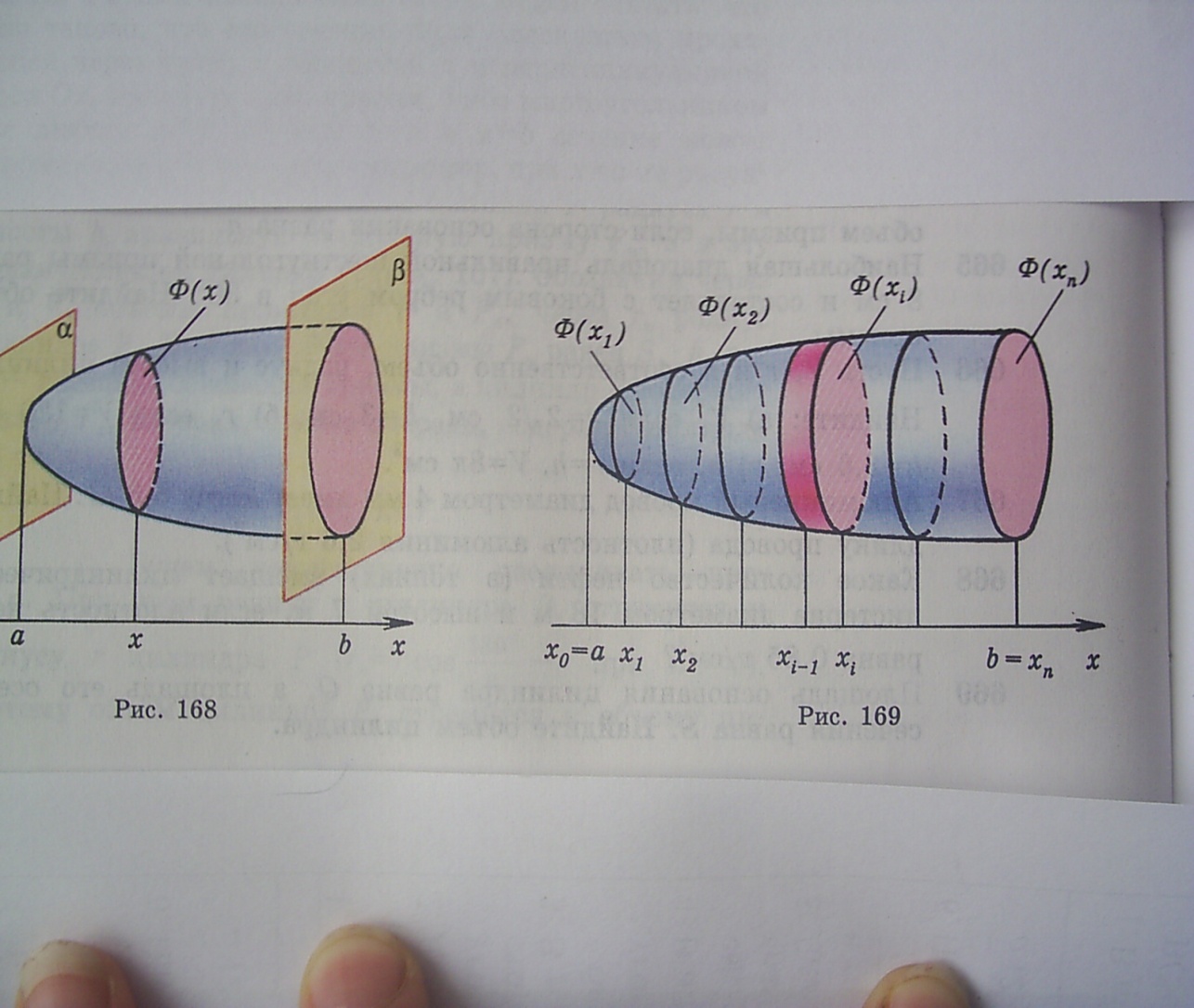




Рис.9

**Из всех этих примеров составим обобщенную таблицу:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Величины** | **Соотношение в дифференциалах** | **Вычисление производной** | **Вычисление интеграла** |
| А- работа | dA=F(x)dx | F(x)= | A = |
| F - сила |  |  |  |
| N - мощность | dA=N(t)dt | N(t)= | A = |
| т — масса тонкого стержня |  |  |  |
| — линейная плот­ность | dm=(x)dx | = | m= |
|  |  |  |  |
| q- электрический  заряд.  I - сила тока | dq=I(t)dt | 1(t) = | q= |
| s — перемещение  v- скорость | ds = v(t)dt | v(t) = | s = |
| Q - количество теплоты | dQ = c(t)dt | c(t) = | Q= |
| с — теплоемкость |  |  |

**7) Решение прикладных задач.**

Задача 1. Пирамида Хеопса представляет собой правиль­ную четырехугольную

пирамиду высотой 147 м, в основании ко­торой квадрат со стороной 232 м.

Она построена из камня, плот­ность которого 2,5 г/см3. Найти работу

против силы тяжести, затраченную при постройке.

Решение. Проведем вертикально вверх ось х с началом у основания пирамиды. По

этой оси будем измерять высоту подъе­ма камней. Решим задачу в общем

виде, а в ответ подставим числовые значения. Пусть высота пирамиды

равна Н, сторона основания а, плотность камня р. Обозначим через A (x)

работу, которую надо совершить для постройки пирамиды от основания

до высоты x.

Найдем сначала сторону у квадрата, получающегося в горизонтальном

сечении пирамиды на высоте x. Из подобия треугольников получаем

=

Откуда имеем: y = (H - x).

Рассмотрим тонкий слой пирамиды, расположенный на расстоянии x от

основания. Пусть толщина слоя равна dx. Слой можно при­близительно

считать параллелепипедом. Масса его dm равна

y2dx = (H- х)2dx.

При подъеме этого слоя на высоту х была проделана работа dA,

равная (gdm)x где g — ускорение силы тяжести, т. е.

dA=g (Н — x)2 dx.

Отсюда: А=А (Н)= = g =

Подставим числовые данные: а =232 м, Н = 147 м, = 2,5 г/см3,

получаем: А = 2,37 1012Дж. = 2,4 105 тоннокилометр.

Задача 2. Квадратная пластина со стороной а погружена в воду перпендикулярно ее

поверхности, причем верхнее основа­ние пластины находится на

поверхности. Найти давление воды на пластину.

Решение. На маленькую площадку площадью dS, располо­женную на глубине х от

поверхности, давит столб воды в виде цилиндра с основанием dS и

высотой х. Давление dp будет при этом равно gxdS, где — плотность

воды, xdS — масса цилинд­ра. Возьмем полоску пластины шириной dx,

находящуюся на глу­бине х. Ее площадь dS равна adx.

Отсюда dp=gaxdx.

Получаем: **р = =ga =**

Задача 3. Серповидная опора изготовлена из 10-миллиметрового плоского стального

листа. Какова масса этой опоры, если ее верхний и нижний контуры

представляют собой параболы?

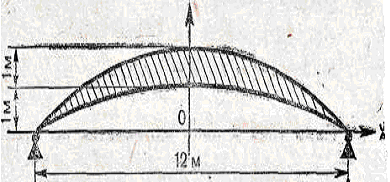


Рис.10

**Указание:**масса опоры вычисляется по формуле m= Sd

где http://festival.1september.ru/articles/567168/Image397.gif- плотность стали ( = 7,8 ·10http://festival.1september.ru/articles/567168/Image399.gif кг/мhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image400.gif), S- площадь сечения опоры,

d - ее толщина (d= 0,01 м). Необходимо ввести прямоугольную систему

координат и определить уравнения нижнего и верхнего контуров опоры:

у = – x2 + 1 , y = –  x2 + 2.

Далее необходимо вычислить площадь фигуры, ограниченной найденными

кривыми.

Ответ: m = 7,8·10http://festival.1september.ru/articles/567168/Image405.gif·8·10http://festival.1september.ru/articles/567168/Image406.gif= 624 (кг).

Задача 4. Найти количество теплоты, выделяемое переменным синусоидальным током

I = 3 sinhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image413.gift (A)

в течение периода T = 0,02с в проводнике с сопротивлением 200 Ом.

**Решение:** количество теплоты Q, выделяемое в данном проводнике, является функцией от

времени t (0http://festival.1september.ru/articles/567168/Image499.gifthttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image499.gifT). За промежуток времени от t до t+http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift приращение этой функции

составит http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifQ = Q(t+http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift) - Q(t). Если http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift достаточно мало, то в силу непрерывности данной

функции I(t) значение силы переменного тока на отрезке http://festival.1september.ru/articles/567168/Image414.gif мало отличается от его

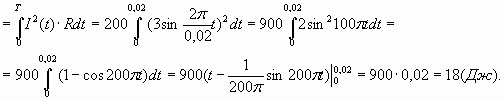
значения в точке t. Поэтому будем условно считать на этом отрезке силу тока постоянной,

и тогда по закону Джоуля - Ленца можно приближенно записать, что за http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift в проводнике

выделится http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifQ http://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gifIhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image415.gif(t)·R ·http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift (Дж).

Отсюда  http://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gif Ihttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image415.gif(t)·R.

Переходя к пределу при http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gift > 0, получаем Qhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image417.gif(t) = Ihttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image418.gif(t)·R,

т.е. Q(t) - первообразная для функции Ihttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image418.gif(t)·R. Тогда Q(t) - Q(0) = http://festival.1september.ru/articles/567168/Image384.gif

Ответ: 18 (Дж)

Задача 5. Найти численное значение силы давления на плотину, имеющую форму

равнобедренного треугольника с основанием a м и высотой h м.

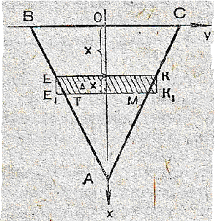


Рис.11

**Решение:** величина силы давления жидкости в ньютонах на горизонтальную площадку

вычисляется по формуле P = g Sx, где S мhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image436.gif- площадь площадки, х м - глубина

погружения площадки , g=9,807 м/сhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image437.gif - ускорение свободного падения, а  кг/мhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image439.gif, -

плотность жидкости, причем в данном случае = 1000 кг/мhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image441.gif.

Если площадка, испытывающая действие силы давления жидкости, не

горизонтальна, то давление на нее будет различным на разных глубинах,

следовательно, сила давления

Р на площадку есть функция от глубины ее погружения х.

Рассмотрим плотину применительно к прямоугольной системе координат и выделим

площадку EKMT, верхний и нижний края которой погружены соответственно на

глубину х и х+http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifх.

При достаточно малых значениях http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifх глубина погружения любой точки этой

площадки незначительно отличается от х, а площадь http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifS площадки - от площади

прямоугольника EKK1E1,

т.е. Shttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gif f(x)· http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifx, где f(x) - длина основания EK выделенного прямоугольника.

В данной задаче f(x) = a(h-x)/h. Приращение http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifР силы давления при переходе от х к

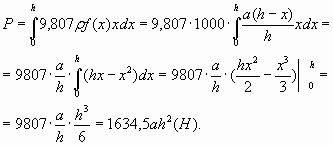
х +http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifх есть сила давления, действующая на площадку EKMT, поэтому имеем:

http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifР http://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gif g··

http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifS·xhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gifg··f(x)· http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifx·x. Отсюда

http://festival.1september.ru/articles/567168/Image500.gif g··f(x)·x.

Переходя к пределу при http://festival.1september.ru/articles/567168/Image442.gifх>0, получаем Рhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image449.gif(х) = gf(x)x, откуда



Ответ: 1634,5ah2 (H).

Задача 6. В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или

среднюю длину пути при прохождении животным некоторого

фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц.

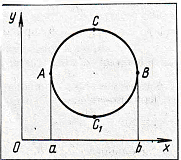


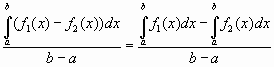
Рис. 12

**Решение:** пусть фиксированным участком будет круг радиуса R. Будем считать, что R не слишком велико. Тогда большинство птиц изучаемого вида, будет пересекать этот круг по прямой. И птица под любым углом в любой точке может пересечь окружность. Обозначим среднюю длину пролета, через http://festival.1september.ru/articles/567168/Image420.gif, которая будет равна любой величине от 0 до 2R.

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, параллельном оси Оy (рисунок). Тогда средняя длина пролета

L  - это среднее расстояние между дугами АСВ и АС1 В , т.е. это среднее значение функции

f1(x) – f2(x), где y= f1(x) - уравнение верхней дуги, а y= f2(x) - уравнение нижней дуги, т.е. L равно:



Так как http://festival.1september.ru/articles/567168/Image425.gif равен площади криволинейной трапеции http://festival.1september.ru/articles/567168/Image426.gifАСВb, а http://festival.1september.ru/articles/567168/Image427.gif равен площади криволинейной трапеции http://festival.1september.ru/articles/567168/Image428.gifАСhttp://festival.1september.ru/articles/567168/Image429.gifВb, то их разность равна площади круга, т.е. R2. Разность http://festival.1september.ru/articles/567168/Image432.gif= 2R, значит http://festival.1september.ru/articles/567168/Image420.gif =  =

Ответ: .

Задача7.Найти объём наклонной треугольной призмы с основанием S и высотой h.

1. Введём ось ОХ перпендикулярно основаниям призмы.

2. (АВС)∩OX=a, a=0, (A1B1C1) ∩ OX=b, b=h

3. Проведём плоскость перпендикулярно ОХ через точку с абсциссой х.

А2В2С2-треугольник, равный основаниям.

Площадь А2В2С2 равна S.

4. S(x) непрерывна на [0;h]

5. V = = = Sx = Sh – 0 = Sh

Ответ: V = Sh (куб. ед.)

***8) Дифференциальное уравнение***

Если вернуться к задаче про пирамиду Хеопса, то видим, что для вычисления произведенной работы были введены две

переменные величины: х – высоту от земли, на которую подняты камни, и А – работу, которую до проделать, чтобы построить пирамиду до высоты х. Было получено соотношение между величинами и найдена функция: dA = F(x) dx, где F(x) = kx(H - x)2. Полученное соотношение можно назвать дифференциальным уравнением для нахождения А = А(х).

Его можно записать и с помощью производной: = F(x), или

А = F(x).

Это уравнение очень простое: в нем производная неизвестной функции выражена как функция от х. Отыскание самой функции А сводится кооперации интегрирования:

А(х) = .

*Дифференциальное уравнение* – это уравнение, связывающее неизвестную функцию и ее производную.

Поэтому, то многие физические законы имеют вид дифференциальных уравнений. Задача интегрирования этих уравнений – важнейшая задача математики. Некоторые дифференциальные уравнения удается проинтегрировать в явном виде, т. е. записать искомую функцию в виде формулы.

Рассмотрим несколько примеров уравнений и их решений.

*1) Уравнение механического движения*

Рассмотрим пример движения материальной точки массой m по оси х под воздействием силы F. Обозначим через t время, v – скорость, а – ускорение точки. Второй закон Ньютона ma = F можно рассматривать как дифференциальное уравнение , если записать ускорение а как вторую производную:

а = = x΄΄

Уравнение mx"=F называют уравнением механического дви­жения. В этом уравнении x=x(t)

неизвестная функция, m и F — известные величины. В зависимости от физических условий

сила F будет задаваться по - разному и мы получим различные дифферен­циальные уравнения.

Рассмотрим несколько вариантов:

а) Сила постоянна: F = const. Уравнение движения примет вид:

х ΄΄ = = а, (где а — постоянная).

б) Сила периодически меняется со временем, например, по закону F = F0 sinwt.

Уравнение движения имеет вид х" =sin wt.

в) Сила пропорциональна смещению (движение идеально уп­ругой пружины):

F= -kx (k>0), знак «—» указывает на то, что направление силы противоположно

направлению смещения.

Уравнение движения можно записать в виде: х" =- х.

г) Свободный радиальный космический полет — на точку действует сила, обратно

пропорциональная квадрату расстояния: F = - .

Уравнение движения: х"= - .

д) Падение с трением — на точку действует постоянная сила тяжести F1 = - mg

и сила трения F2, пропорциональная скорости: F2 =- kx'.

Уравнение движения имеет вид х" =-g - х'.

Во всех этих случаях встречаются уравнения первого порядка и второго порядка.

*2) Радиоактивный распад*.

Рассматривается радиоактивное вещество,, масса которого m меняется со временем: m=m (t). Экспериментальные данные дают основание считать, что скорость изменения массы пропорциональ­на массе вещества в данный момент, т. е. что = - km, где

через k обозначен коэффициент пропорциональности: (знак «—» перед положительным коэффициентом k выписан для того, чтобы подчеркнуть, что масса вещества убывает).

***3)*** *Народонаселение*

Пусть население страны в момент време­ни t выражается функцией L = L (t).

Ес­тественным допущением будем считать, что за единицу времени народонаселение

увели­чивается на определенный процент. Если в момент времени t число жителей

равно L (t), то за период времени [t; t +dt] появится при­мерно kL(t dt новых

жителей, т. е. L=kL(t)dt. Хотя величина L принимает целые значения, обыч­но

интересуются приближенными значениями L. Заменяя настоя­щую функцию L

функцией, принимающей значения непрерывно и удовлетворяющей соотношению

dL = kLdt, мы не сделаем боль­шой ошибки.

Таким образом, скорость роста функции L равна kL и она удовлетворяет

дифференциальному уравнению: = kL.

4) *Электрическая цепь*.

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последователь­но соединенных

сопротивления и конденсатора (рис. 8). Будем считать, что в цепи сделано короткое

замыкание и конденсатор, имевший начальный заряд, начинает разряжаться.

Напряжение на конденсаторе в момент времени t обозначим через U(t).

Заряд q(t) связан с напряжением U формулой q = CU, где С — емкость

конденсатора. Через сопротивление пойдет ток, который связан с напряжением

U формулой U =- R1, где R — величина сопротив­ления (закон Ома), а знак « —»

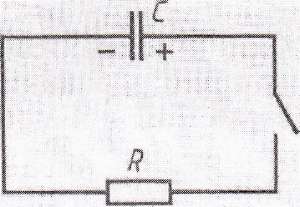
связан с направлением тока. Появление тока связано с изменением заряда q, и, значит,

ве­личина I является скоростью изменения заряда во времени: I= .

Подставляя в эту формулу вместо I выражение — , а вместо q выражение CU,

получим уравнение для напряжения:

C = - , или = - .

 Рис. 13

Сделаем выводы: многие явления природы и техники опи­сываются

дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, связывающими неизвестные

величины и их производные.

Вывод дифференциальных уравнений основан на знании законов изу­чаемых

явлений.

Дифференциальное и интегральное исчисление позволило за­писать на

математическом языке в виде дифференциальных урав­нений различные законы

и явления. За 300 лет существования это­го раздела математики появились многие

тысячи дифференциаль­ных уравнений. Первое замечательное обстоятельство, которое

было замечено, состоит в том, что многие уравнения похожи друг на друга.

Сравним, например, три уравнения, полученные в при­мерах 2, 3 и 4 предыдущего пункта:

= - km; = kL; = - .

Все они имеют один и тот же вид — скорость изменения иско­мой функции пропорциональна

значению этой функции. Решив уравнение = kx мы получим решения всех трех

уравнений, подставляя разные значения коэффициента пропорциональности k.

Здесь мы наблюдаем замечательное проявление силы матема­тики — совершенно разные

процессы привели к одной и той же математической модели. Исследование этой модели дает

нам ответ как в разобранных задачах, так и во многих других, которые приводят к

аналогичному уравнению.

Математики научились объединять вместе похожие уравнения. Классифицировать их.

Так же как для простых уравнений были найдены в свое время формулы их корней, так и для

некоторых стандартных дифференциальных уравнений были получены формулы их решений.

Решение дифференциального уравнения — это функция, при подстановке которой

уравнение превращается в тождество. Так как операция дифференцирования выполняется

просто, то всегда нетрудно проверить, является данная функция решением

дифференциального уравнения или нет.

Рассмотрим примеры решений встречающихся ранее уравнений.

*1)* Функция x=+ Vot + x0, где x0,v0 — произвольные числа,

является решением уравнения х" = а. Действительно, вычисляя производные, получаем

x΄ = at+vо, х" = а.

2) Функция х = - sin t является решением уравнения

x΄΄ = sin t.

1. Функция х =Asin( , где A и — произвольные числа, является решением уравнения

х" =- x.

1. Функция m = C, где С — произвольная постоянная, является решением уравнения

m΄=-km.

Однако не для всех уравнений решения записываются так прос­то. Так, для уравнения

свободного космического полета написать формулу решения довольно трудно. Часто

удается исследовать ре­шение дифференциального уравнения, не находя самого решения.

Или наоборот, решение одного из уравнений обобщается, видоизменяется и становится

решением другого.

Возьмем уравнение второго порядка из задачи колебания упругой пружины:

x΄΄ = - x.

Обозначим константу, стоящую перед искомой функцией, через -

Рассмотрим уравнение x΄΄ = - x.

Это уравнение называется *уравнением свободных гармонических колебаний.*

Проверим, что функция х = А cos (t + ), где А и — константы, является решением

уравнения х" = — **2**x.

Действи­тельно, х' = — A sin (t + ),

х" = — 2A cos (t +)=— 2x.

Оказывается, что, меняя A и , мы получим все решения уравнения гармонических

колебаний. Константы A и имеют наглядный смысл: A - это амплитуда колебаний,

- начальная фаза. Значения A и находятся из начальных условий — значений х и х'

в начальный момент времени. Графики гармони­ческих колебаний при различных

значениях A, приведены на рисунке 14.

C:\Documents and Settings\USER\Мои документы\рис33.wmf

Рис. 14

**9.Заключение**

В заключение подведем некоторые итоги проделанной работы.

Были проанализированы различные источники, рассмотрены различные подходы к изложению исследуемого материала, вследствие чего выделены основные идеи темы, на основании этого и в силу необходимости полноценно изучены важнейшие элементы интегрального исчисления и его практическое применение при решении различных задач.

На мой взгляд, применение физических моделей при введении понятия интеграла, рассмотрении его свойств, отработке техники интегрирования и изучении приложений способствует осознанному качественному усвоению материала, развитию правильного представления об изучаемом понятии, его огромной значимости в физике, формированию мировоззрения, таких специальных качеств, как умение строить математические модели реальных процессов и явлений, исследовать и изучать их, а, следовательно, способствует развитию мышления, памяти, внимания и речи.

И стали понятны слова *О. Конта* «Человеческий ум может найти  в интегральном исчислении неисчерпаемое поле своей деятельности». А для души стихотворение Петра Долженкова «Определенный интеграл».

Определенный интеграл,

Ты мне ночами начал сниться,

Когда тебя впервые брал,

Я ощутил твои границы.

И ограниченность твоя

Мне придавала больше силы.

С тобой бороться должен я,

Но должен победить красиво!

Какое счастие познал

Я в выборе первообразной,

Как долго я ее искал,

Как мне далась она не сразу.

Замен и подстановок ряд

Привел к решению задачи.

Ты побежден! Ты мною взят!

Да и могло ли быть иначе…

Библиография

1. Алимов, Ш. А. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк./ Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. - М.: Просвещение, 1993.

2. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. сред. шк. –

М.: Просвещение, 1992.

3. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Уч. пособие. - СПб.:

Изд-во «Профессия», 2001.

4. Задачи как средство обучения алгебре и началам анализа в X классе. Уч. пособие//

Сост. Е. С. Канин. – Киров, 1985.

5. Задачник по курсу математического анализа. Уч. пособие для студентов заочн. отделений физ.-мат. фак-тов пединститутов. Ч. I// Под ред. Н. Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971.

6. Зельдович, Я. Б. Высшая математика для начинающих  и её приложения к физике.

  Уч. пособие для физико-математических средних школ и проведения факультативных занятий. – М.: Наука, 1970.

7. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа. Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. –

М.: Просвещение, 1998.

8. М. И. Башмаков Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы- М.: Просвещение, 1992.

9. [portfolio.1september.ru](http://portfolio.1september.ru/)

10. <http://festival.1september.ru/>